Construction du 17-gone régulier à la règle et au compas

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. On note A_0, B et I les points d'affixes respectives 4,4i et i. Soit C le cercle de centre O et de rayon 4, orienté trigonométriquement, l'origine pour la mesure des angles étant prise en A_0. Soient $\vartheta = \frac{2\pi}{17}$, $z_k = e^{ki\vartheta}$, $k\in\{0,1,2,\dots,16\}$, $x_1 = (z_1+z_{16})+(z_2+z_{15})+(z_4+z_{13})+(z_8+z_9)$ et $x_2 = (z_3+z_{14})+(z_5+z_{12})+(z_6+z_{11})+(z_7+z_{10})$.

1°) Après avoir exprimé x_1 et x_2 en fonction de $\cos n\vartheta$ $(n\in\{1,2,\dots,8\})$, montrer que $x_1+x_2 = -1$ et $x_1.x_2 = -4$. En déduire que x_1 et x_2 sont solutions de $u^2+u-4=0$. (A) En comparant ϑ et 2ϑ à $\pi/4$, montrer que $x_1>0$ et $x_2<0$.

2°) Soient $y_1 = (z_1+z_{16})+(z_4+z_{13})$ et $y_2 = (z_2+z_{15})+(z_8+z_9)$. Montrer que y_1 et y_2 sont solutions de $u^2-x_1u-1=0$ (B). Montrer que $y_1>y_2$ et en déduire que $y_1>0$ et $y_2<0$.

3°) Soient $y_3 = (z_3+z_{14})+(z_5+z_{12})$ et $y_4 = (z_6+z_{11})+(z_7+z_{10})$. Montrer y_3 est la racine positive et y_4 la racine négative de $u^2-x_2u-1=0$. (C)

4°) Montrer que $2\cos\vartheta$ est la plus grande des solutions de $u^2-y_1u+y_3=0$. (D)

5°) Déduire de ce qui précède que ϑ est constructible à la règle et au compas. Effectuer le calcul de $\cos\vartheta$.

6°) Soit $\varphi\in]0,\frac{\pi}{2}[$ tel que $\operatorname{tg} 4\varphi = 4$. Montrer que (A) se ramène à (A') : $u^2+4u\operatorname{cotg}4\varphi-4=0$. En déduire que $x_1 = 2\operatorname{tg}2\varphi$ et $x_2 = -2\operatorname{cotg}2\varphi$.

7°) En paramètrant (B) et (C) en φ, montrer que : $y_1 = \operatorname{tg}(\varphi+\pi/4)$, $y_2 = \operatorname{tg}(\varphi-\pi/4)$, $y_3 = \operatorname{tg}\varphi$.

8°) En déduire : $2\cos 3\vartheta+2\cos 5\vartheta=\operatorname{tg}\varphi$ (E) et $4\cos 3\vartheta.\cos 5\vartheta=\operatorname{tg}(\varphi-\pi/4)$ (F).

9°) On construit la droite (Iz) telle que $4(\vec{Iz},\vec{IO}) = (\vec{IA_0},\vec{IO})$. Soit $F=(Iz)\cap(OA_0)$. Montrer que $(\vec{IO},\vec{IF})=\varphi$.

10°) On construit la droite (It) telle que $(\vec{IF},\vec{It})=-\pi/4$. Soient $G= (It)\cap(OA_0)$, K l'intersection du cercle de diamètre A_0G avec (OB), H_3 $(\in[OA_0])$ et H_5 les intersections du cercle de centre F et de rayon FK avec (OA_0). Les perpendiculaires à (OA_0) en H_3 et H_5 coupent C en A_3 et A_5, points d'ordonnées positives. Montrer que $\overline{OH_3}+\overline{OH_5} = 4\overline{OF}$ et en déduire que : $2\cos(\vec{OA_0},\vec{OA_3})+2\cos(\vec{OA_0},\vec{OA_5})=\operatorname{tg}\varphi$. (G)

11°) Montrer que $4\cos(\vec{OA_0},\vec{OA_3}).\cos(\vec{OA_0},\vec{OA_5}) = -4\dfrac{OK^2}{OA_0^2} = -\dfrac{\overline{GO}}{\overline{OI}} = \operatorname{tg}(\varphi-\pi/4)$. (H)

12°) Comparant les systèmes {(E),(F)} et {(G),(H)}, montrer que $(\vec{OA_0},\vec{OA_3}) = \frac{6\pi}{17}$.

13°) Effectuer la construction du 17-gone régulier à la règle et au compas. (construction due à Richmond (1909)). On utilisera le fait que $6\times\frac{6\pi}{17} \equiv \frac{2\pi}{17}\ (2\pi)$.